

用高效矢通量分裂格式 求解二维叶栅的跨音流动*

西安交通大学 刘慎之** 刘 斌 向一敏

【摘要】 提出了一种高效隐式矢通量分裂格式。该格式通过在显格式上添加合适的高阶小量,避免了近似因子分解和系数矩阵运算,大大地减少了计算量。同时该格式在收敛性及激波捕捉精度等方面均保持了矢通量分裂格式所具有的优势。将该格式用到了二维叶栅的无粘跨音流场的数值模拟中去,结果令人满意,证实了无矩阵运算、无近似因子分解的隐格式构造有一定的推广意义。

关键词: 隐格式 叶栅 跨音流动 数值模拟 激波

1 计算方法

文献[1]中首次提出了在显格式的基础上添加高阶小量来构造无近似因子分解、无矩阵运算的隐格式的构造思想。文献[2]将它体现到MC-LB格式中去,并用于二维、三维的喷管及叶栅的数值计算中,获得了成功。整个计算由于避免了近似因子分解和矩阵运算,因而大大减少了计算量,这给隐格式的发展提供了一条新途径,但在计算中也发现MC-LB格式在收敛性上还有待于进一步改进。原因可能是由于该格式是二步格式和由Mac Cormack格式本身的一些特性造成的。因而,我们便致力于尝试将上述隐格式构造思想用到矢通量分裂一步格式中去,有望获得的隐式矢通量分裂一步格式能保持矢通量分裂格式好的收敛性和好的激波捕捉精度的特点,且能大大减少计算工作量,从而也进一步验证上述隐格式构造思想适用于其它格式的通用性。

任意曲线坐标系中,二维无因次Euler方程可表达为:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

其中 $\hat{U} = J [\rho, \rho u, \rho v, E]^{-1}$, $\hat{F} = J [\rho \tilde{u}, \rho u_x \tilde{u} + P \xi_x + \rho u_y \tilde{u} + P \xi_y, (E + P) \tilde{u}]^{-1}$

$$\hat{G} = J [\rho \tilde{v}, \rho u_x \tilde{v} + P \eta_x, \rho u_y \tilde{v} + P \eta_y, (E + P) \tilde{v}]^{-1}$$

$J = |\alpha_i / \xi_i|$, x_i 为实际坐标, ξ_i 为任意坐标。 $\tilde{u} = u \alpha_x / \alpha + v \xi_x / \alpha \gamma$, $\tilde{v} = u \eta / \alpha + v \eta / \alpha \gamma$ 。

应用Steger-Warming分裂原理对天通量 $\hat{F}$ 、 $\hat{G}$ 进行分裂可得矢分二维Euler方程为:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \hat{F}^+}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}^-}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}^+}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}^-}{\partial \eta} = 0 \quad (2)$$

其中亚矢通量 $\hat{F}^+$ 、 $\hat{F}^-$ 、 $\hat{G}^+$ 、 $\hat{G}^-$ 的计算式可整理为极简洁的形式:

$$\hat{F}^{\pm} = J \rho / (2v) [C_1, C_{1u} + C_2 a \xi_x, C_1 v + C_2 a \xi_y, C_1 (u^2 + v^2) / 2 + C_2 a \xi_x u + C_2 a \xi_y v + C_3 a^2 / (\gamma - 1)]^{-1}$$
$$\hat{G}^{\pm} = \{\hat{F}\} \xi \text{ 换成 } \eta$$

其中 $C_1 = 2(Y-1)\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4$, $C_2 = \lambda_3 - \lambda_4$, $C_3 = \lambda_3 + \lambda_4$ 。

计算 $\hat{F}^\pm$ 时, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 用 $\Lambda(\tilde{A})$ 中的特征值或取零 ($\hat{A} = \partial \hat{F} / \partial \hat{v}$), 相应算 $\hat{G}^\pm$ 时用 $\Lambda(\hat{B})$ 中某特征值或取零 ($\hat{B} = \partial \hat{G} / \partial \hat{v}$)。

由无矩阵运算、无近似因子分解隐格式构造思想, 再结合矢通量分裂沿不同方向的分裂特点, 在方程组 (2) 式的右端添加高阶小量 $-\Delta t (\partial \xi) \tilde{\lambda}^+ (\partial v / \partial \alpha)$ 、 $\Delta t (\partial \xi) \tilde{\lambda}^- (\partial v / \partial \alpha)$ 、 $-\Delta t (\partial \eta) \tilde{\lambda}^+ (\partial v / \partial \alpha)$ 、 $\Delta t (\partial \eta) \tilde{\lambda}^- (\partial v / \partial \alpha)$, 便可得到 (2) 式的近似偏微分方程组:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F^+}{\partial \xi} + \frac{\partial F^-}{\partial \xi} + \frac{\partial G^+}{\partial \eta} + \frac{\partial G^-}{\partial \eta} = -\Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\tilde{\lambda}^+ \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right] + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\tilde{\lambda}^- \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right] - \Delta t \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\tilde{\lambda}^+ \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right] + \Delta t \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\tilde{\lambda}^- \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right] \quad (3)$$

对近似方程组 (3) 差分展开 (“+”后差、“-”前差) 得差分格式, 整理为:

$$\begin{aligned} & -\frac{\Delta t}{\Delta \eta} (\tilde{\lambda}^+)^n_{i,j} \cdot \delta v_{i,j-1}^{n+1} + \left[1 + (\tilde{\lambda}^+)^n_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta \xi} + (\tilde{\lambda}^-)^n_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta \xi} + (\tilde{\lambda}^+)^n_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} + (\tilde{\lambda}^-)^n_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \right] \delta v_{i,j}^{n+1} \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (\tilde{\lambda}^-)^n_{i,j} \delta v_{i,j+1}^{n+1} = \Delta v_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\tilde{\lambda}^+)^n_{i,j} \cdot \delta v_{i-1,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\tilde{\lambda}^-)^n_{i,j} \cdot \delta v_{i+1,j}^{n+1} \end{aligned} \quad (4)$$

提高显式部分 $\Delta v_{i,j}^n$ 的精度就可提高定常解的精度, 本文对 $\Delta v_{i,j}^n$ 采用二阶精度离散展开。

对 (4) 式在 i 站上沿 η 方向用追赶法直接求解, 求出未知量 $\delta v_{i,j-1}^{n+1}$, $\delta v_{i,j}^{n+1}$, $\delta v_{i,j+1}^{n+1}$ 。该式避免了系数矩阵运算和近似因子分解。

当入满足下述各式时, 格式 (4) 是无条件稳定的:

$$\tilde{\lambda}^+ = \text{Max}\{\rho(A^+) - \Delta \xi / C \Delta t, 0\}, \quad \tilde{\lambda}^- = \text{Max}\{\rho(A^-) - \Delta \xi / C \Delta t, 0\}$$

$$\tilde{\lambda}^+ = \text{Max}\{\rho(B^+) - \Delta \eta / C \Delta t, 0\}, \quad \tilde{\lambda}^- = \text{Max}\{\rho(B^-) - \Delta \eta / C \Delta t, 0\}$$

其中 $\rho(A^+)$ 、 $\rho(B^+)$ 、 $\rho(A^-)$ 、 $\rho(B^-)$ 分别为矩阵 A^+ 、 A^- 、 B^+ 、 B^- 的谱半径, 一般取 $C = 2.0$ 。

2 计算结果

本文用上述方法对北重跨音叶栅进行了数值模拟实验, 几何、气功参数及实验值取自文献 [4], 该叶栅的网格密度为 41×15 , 其中叶道内流动方向有 21 条网格, 栅前、栅后各延长 0.5 个栅距。图 1 是用本方法及文献 [2] 中的方法所得的叶型表面压力 p 的分布曲线。从计算结果与实验数据的对比情况看, 本方法在激波区附近的计算精度较文献 [2] 有了大幅度提高, 且整体计算结果与实验数据吻合情况良好。图 2 和图 3 为计算区域的等压线和等马赫线分布图。图 4 是速矢图。由图 5 可看出在 $CFL = 18$ 附近, 用本方法进行计算, 收敛速度较 MC-LB 方法有了大幅度的提高, 且用本方法进行计算, 大致迭代 400 步左右, 误差 $Dumax$ 即可下降 3 个数量级, 便可满足一般的计算要求。整个计算所需 CPU 时间为 400 秒左右。

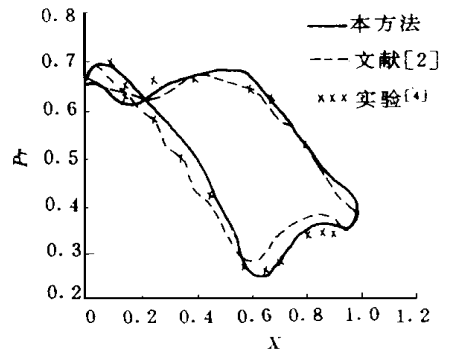


图 1 叶栅表面压力分布

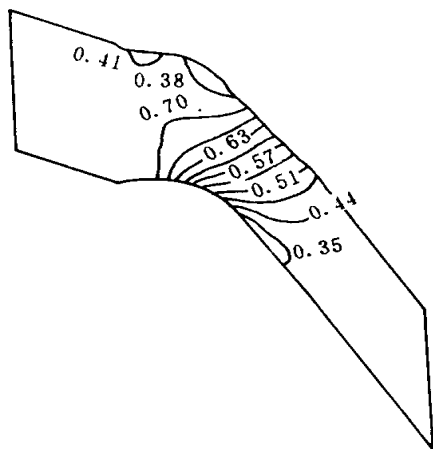


图 2 等压线

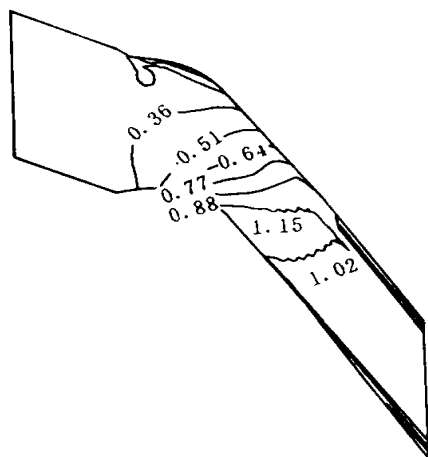


图 3 等马赫数线

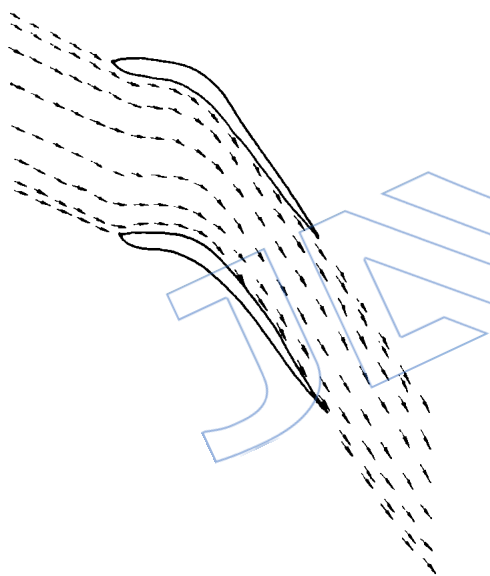


图 4 速矢图

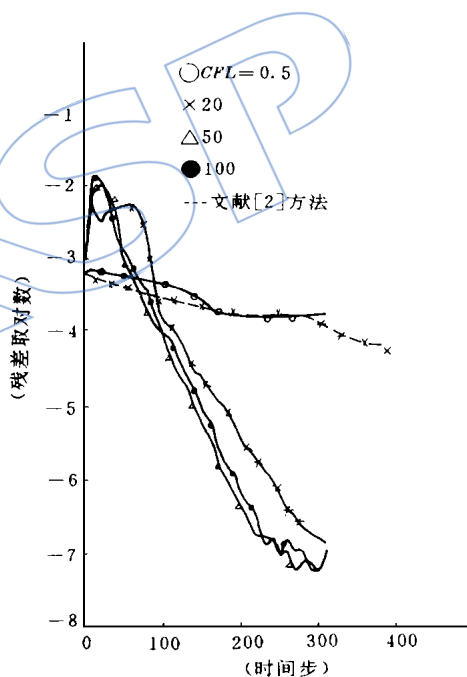


图 5 收敛史比较

参 考 文 献

- 1 刘斌, 向一敏. 利用高阶添加项构造原参数气动方程组的隐式差分格式. 中国工程热物理年会第八届年会论文集, 第二分册, 1992
- 2 汪蓓蓓. 叶轮机械内部粘性流动的数值计算及实验研究: [学位论文]. 西安交通大学博士学位论文, 1991
- 3 刘慎之. 一种高效隐式矢量通量分裂格式及其在叶轮机械气动计算中的应用: [学位论文]. 西安交通大学, 1993
- 4 张耀科, 龚增锦, 沈孟育. 关于用时间相关法求解平面叶栅跨音绕流的一些问题. 工程热物理学报, 1980, 1 (4)

(责任编辑 魏星禄)